Les circuits actifs élémentaires passe-bas d'ordre 2 constituent des éléments de base qui servent à réaliser la synthèse de filtres plus complexes. En effet, en associant en série X cellules du second ordre, on peut réaliser n'importe quel filtre d'ordre 2X. Pour construire des filtres d'ordre impair, il convient d'associer en série du premier ordre que l'on réalise facilement à l'aide d'un circuit RC.

Fonction de transfert des filtres polynomiaux

Pour réaliser des filtres passe-haut, passe-bande, coupe-bande, il convient d'appliquer aux fonctions de transfert des circuits élémentaires passe-bas d'ordre 1 ou d'ordre 2 les transformations fréquentielles classiques pour obtenir les fonctions de transfert des circuits élémentaires du filtre à réaliser. On voit donc quelle importance revêtent les fonctions de transfert du second ordre des circuits élémentaires passe-bas, et combien il est intéressant de rechercher une formule permettant de calculer toutes les fonctions de transfert des filtres polynomiaux passe-bas d'ordre 2.

Pour les filtres polynomiaux passe-bas d'ordre 2, la fonction caractéristique $Ca(\omega^2)$ s'écrit dans sa forme la plus générale :

$$Ca(\omega^2) = \varepsilon^2 [A\omega^4 + B\omega^2 + C]$$

Posons :

$$P = A\omega^4 + B\omega^2 + C$$

Pour $0 \leqslant \omega < 1$ on doit avoir $0 \leqslant P \leqslant 1$

Posons : $1 - C = \alpha$

Pour $\omega = 0$, on a : $P = C$

et pour $\omega = 1$, on a :

$P = A + B + C = 1$. Donc :

$0 \leqslant C \leqslant 1$

$A + B = 1 - C$

$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

Pour $\omega > 1$, on a : $P > 1$, et :

P	$1 \longrightarrow \infty$
ω	$1 \longrightarrow \infty$

Soit $P' = \omega\,[4\,A\,\omega^2 + 2B]$.

Lorsque $\omega > 1$, on doit avoir :

$P' > 0$. Donc :

$A > 0$

Pour $\omega > 1$, B peut être positif. Si $B < 0$, il faut $4A\,\omega^2 + 2B > 0$ quand ω varie de 1 à ∞. Donc :

$$A > -\frac{B}{2} \qquad (B < 0)$$

Mais $A + B = \alpha$. Donc quand $B < 0$, $A > |B|$. La condition ci-dessus est donc toujours satisfaite. Pour C donné, on a : $\alpha = 1 - C$ et $B = \alpha - A$

Pour $\omega = 1$, $P' = 2\,(A + \alpha)$

Pour $\omega = 1$, la valeur de P' croît quand croît celle de A.

Pour $0 \leqslant \omega < 1$ on doit avoir : $0 \leqslant A\,(\omega^4 - \omega^2) + \alpha\omega^2 + C \leqslant 1$.

La condition $A\,(\omega^4 - \omega^2) + \alpha\omega^2 + C \leqslant 1$ est toujours satisfaite $\forall\, A > 0$. Il faut également : $A\,(\omega^4 - \omega^2) + \alpha\omega^2 + C \geqslant 0$.

Donc :

$$A \leqslant \frac{\omega^2\,(C - 1) - C}{(\omega^4 - \omega^2)} = y$$

avec $(\omega^4 - \omega^2) \neq 0$.

$$y' = \frac{2\,[-C\omega^5 + \omega^5 + 2C\omega^3 - C\omega]}{(\omega^4 - \omega^2)^2}$$

Pour $0 < \omega < 1$ on a : $[\omega^4 - \omega^2]^2 > 0$ et $y' = 0$ pour :

$$\omega = \pm\left[\frac{-C \pm \sqrt{C}}{1 - C}\right]^{1/2}$$

La solution qui convient est :

$$\omega = \left[\frac{\sqrt{C}}{1 + \sqrt{C}}\right]^{1/2}$$

puisque $\omega \geqslant 0$.

$$y''=\frac{(\omega^4-\omega^2)[-10C\omega^4+10\omega^4+12C\omega^2-2C]-2(-2C\omega^5+2\omega^5+4C\omega^3-2C\omega)(\omega^4-\omega^2)(4\omega^3-2\omega)}{(\omega^4-\omega^2)^4}$$

On calcule que $y'' > 0$ pour :

$$\omega=\left[\frac{\sqrt{C}}{1+\sqrt{C}}\right]^{1/2}$$

Donc : $A \leqslant (1+\sqrt{C})^2$

Pour C donné, on prendra pour valeur de A :

$A = \beta (1+\sqrt{C})^2$

avec : $0 < \beta \leqslant 1$

On trouve immédiatement pour la valeur de B :

$B = (1+\sqrt{C})[(1-\sqrt{C}) - \beta(1+\sqrt{C})]$

On obtient donc pour P :

$P = \beta(1+\sqrt{C})^2 \cdot \omega^4 + (1+\sqrt{C})[(1-\sqrt{C}) - \beta(1+\sqrt{C})] \cdot \omega^2 + C$

avec : $0 < \beta \leqslant 1$ et $0 \leqslant C \leqslant 1$

On a donc pour les fonctions caractéristiques :

$Ca(\omega^2) = \varepsilon^2 \cdot P$

Pour obtenir les fonctions de transfert normalisées recherchées, il convient donc de calculer les racines de l'expression :

$\varepsilon^2\beta(1+\sqrt{C})^2 \cdot p^4 - \varepsilon^2(1+\sqrt{C})[(1-\sqrt{C})] - \beta(1+\sqrt{C})] \cdot p^2 + \varepsilon^2 C + 1$ avec : $0 < \beta \leqslant 1$ et $0 \leqslant C \leqslant 1$

Dans cette fonction, la variable complexe p est, bien sûr, normalisée.

Soient p_1 et p_2 les racines à partie réelle nagative.

La fonction de transfert s'écrit :

$$F(p)=\frac{1}{\varepsilon(1+\sqrt{C}) \cdot \sqrt{\beta} \cdot (p-p_1)(p-p_2)}$$

En ce qui concerne les fonctions de transfert normalisées des filtres passe-bas d'ordre 1, on obtient pour le polynôme P :

$P = (1-B) \cdot \omega^2 + B$

avec : $0 \leqslant B < 1$

Et la fonction de transfert s'écrit :

$$F(p)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{(1-B)} \cdot (p-p_1)}$$

p_1 étant la racine à partie réelle négative de l'expression :

$1 + \varepsilon^2 [(1-B)\left(\frac{p}{j}\right)^2 + B)$

On peut également calculer, à l'aide des formules précédentes, des filtres passe-bas d'ordre supérieur à 2.

Dans le cas d'un filtre passe-bas d'ordre supérieur à 2 et pair, on a pour le polynôme P :

$P = \prod_i P_i$

P_i est un polynôme d'ordre 4.

Dans le cas d'un filtre passe-bas d'ordre supérieur à 2 et impair, on a pour le polynôme P :

$P = P_o [\prod_i P_i]$

P_i est un polynôme d'ordre 4.

P_o est un polynôme d'ordre 2.

Dans tous les cas, si l'on écrit P sous la forme :

$P = \prod_n P_n$

on a pour la fonction caractéristique :

$Ca(\omega^2) = \varepsilon^2 \cdot [\prod_n P_n]$

Pour obtenir la fonction de transfert, il convient donc de rechercher les racines de l'expression suivante :

$1 + \varepsilon^2 \cdot [\prod_n P_n(\frac{p}{j})]$

Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_u$ les racines à partie réelle négative, la fonction de transfert s'écrit :

$$F(p)=\frac{1}{k(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\ldots(p-p_u)}$$

Exemple

$P = A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_o$

On a donc :

$P = [\beta_1(1+\sqrt{C_1})^2\omega^4 + (1+\sqrt{C_1})[(1-\sqrt{C_1}) - \beta_1(1+\sqrt{C_1})]\omega^2 + C_1]$

$\cdot [\beta_2(1+\sqrt{C_2})^2\omega^4 + (1+\sqrt{C_2})[(1-\sqrt{C_2}) - \beta_2(1+\sqrt{C_2})]\omega^2 + C_2]$

Pour $\beta_1 = \beta_2 = 1$ et $C_1 = C_2 = 1$, on a :

$P = 16\omega^8 - 32\omega^6 + 24\omega^4 - 8\omega^2 + 1$

Pour $\beta_1 = 1$, $C_1 = 1$, $\beta_2 = 0{,}375$ et $C_2 = 1$, on a :

$P = 6\omega^8 - 12\omega^6 + 11{,}5\omega^4 - 5{,}5\omega^2 + 1$

Transformations fréquentielles

Pour réaliser des filtres passe-haut, passe-bande, ou coupe-bande, il suffit de transformer les fonctions de transfert des filtres passe-bas obtenues à l'aide des expressions précédentes en utilisant les transformations fréquentielles suivantes :

$$p \longrightarrow \frac{1}{p} \text{(passe-haut)}$$

$$p \longrightarrow \left(\frac{1}{L_B}\; p+\frac{1}{p}\right) \text{(passe-bande)}$$

$$p \longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{L_B}\left(p+\frac{1}{p}\right)} \text{(coupebande)}$$

L_B est la largeur de bande relative pour les filtres passe-bande et coupe-bande.

Rappelons que si $/\alpha/_{max}$ est la valeur maximale de $/\alpha/$ (affaiblissement produit par le filtre) en bande passante, on a :

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{(\alpha)\,max}{10}} - 1$$

Alain Pelat