

# Les filtres actifs et leur synthèse dite « en cascade »

Le filtrage a pour but de séparer ou de « trier » des signaux (en général électriques dans le cas des Télécommunications) en fonction de leurs fréquences.

Anciennement cette séparation faisait l'objet de montages électriques réalisés presque uniquement à l'aide de composants dits « passifs » (résistances, bobinages, condensateurs, quartz). Mais l'utilisation de composants uniquement « passifs » conduit, lorsque les fréquences des signaux à séparer sont relativement faibles, à la construction de circuits électriques comprenant des bobinages et des condensateurs très encombrants. En particulier, pour la réalisation de filtres dits « B.F. », les calculs montrent qu'il est nécessaire d'utiliser des bobinages dont l'encombrement, à l'époque des circuits « miniaturisés », ne peut être accepté.

Evidemment, on peut construire des filtres ne comprenant que des condensateurs et des résistances. Mais de tels circuits, s'ils ne possèdent plus de bobinages, présentent encore le défaut d'affaiblir souvent considérablement les signaux à « trier ».

Actuellement, les transistors et les divers circuits dits « intégrés » permettent de réaliser des filtres qui, dans le domaine des basses fréquences, ne présentent plus les inconvénients ci-dessus mentionnés. Les circuits « intégrés » le plus souvent utilisés dans la construction des filtres sont les amplificateurs opérationnels, les sources commandées, les convertisseurs d'impédance négative et les gyrateurs. Les filtres, dans la construction desquels entrent des transistors ou des circuits « intégrés », s'appellent « filtres actifs ».

Les filtres actifs sont surtout utilisés dans le domaine des basses fréquences. Ils sont réalisés presque exclusivement à l'aide de transistors, de circuits « intégrés », de condensateurs et de résistances.

Les filtres pratiques faisant l'objet du présent article concernent l'étude théorique et la construction de circuits actifs dans la réalisation desquels n'entrent que des condensateurs, des résistances et des circuits « intégrés ».

## Les gabarits

Soit le schéma suivant (fig. 1) :

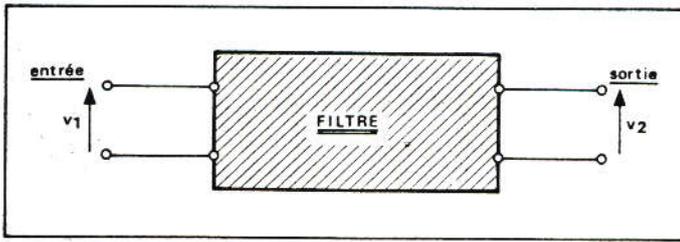


Fig. 1

On écrit que la fonction de transfert de ce quadripôle est :  $f_T(p)$ .

On a donc :

$$f_T(p) = \frac{v_2}{v_1} \text{ avec } p = j\omega$$

On peut donc écrire que l'on a :

$$|f_T(j\omega)| = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = f_{TM}(\omega)$$

$$\alpha = 20 \log [f_{TM}(\omega)]$$

$\alpha$  est l'affaiblissement produit par le quadripôle. Cet affaiblissement est une fonction de la pulsation  $\omega$  donc de la fréquence du signal « injecté » à l'entrée du circuit.

Dans ce qui suit on représentera graphiquement  $|\alpha|$ .

Le but d'un filtre est de séparer des signaux utiles d'autres signaux considérés comme indésirables. Pour réaliser un filtre, il convient donc de connaître le spectre des fréquences utiles.

Un filtre dit « idéal » est donc un circuit qui possède la propriété de transmettre toutes les fréquences considérées par l'utilisateur comme utiles sans atténuation et sans déphasage et d'éliminer toutes les autres.

Les courbes d'affaiblissement des quatre types de filtres idéaux ( $|\alpha| = f(\text{fréquence})$ ) sont représentées par les graphes suivants (fig. 2) :

Pour le filtre « passe-bas », on a :

$$|\alpha| = 0 \text{ pour } f < f_1 \text{ et } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ pour } f > f_1$$

Pour le filtre « passe-haut », on a :

$$|\alpha| = 0 \text{ pour } f > f_1 \text{ et } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ pour } f < f_1$$

Pour le filtre « passe-bande », on a :

$$|\alpha| = 0 \text{ pour } f_1 < f < f_2 \text{ et } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ pour } f < f_1 \text{ et } f > f_2$$

Pour le filtre « coupe-bande », on a :

$$|\alpha| = 0 \text{ pour } f < f_1 \text{ et } f > f_2 \text{ et } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ pour } f_1 < f < f_2$$

Dans la pratique, il n'est pas possible de construire des circuits électriques présentant des courbes d'affaiblissement semblables à celles représentées précédemment en utilisant pour les réaliser un nombre fini de composants.

Les filtres réels présentent donc les défauts suivants :

- l'affaiblissement en bande « coupée » n'est pas infini mais présente une valeur finie ;
- l'affaiblissement en bande « passante » n'est pas constamment nul ;
- la transition entre la bande « coupée » et la bande « passante » n'est pas brusque mais progressive.

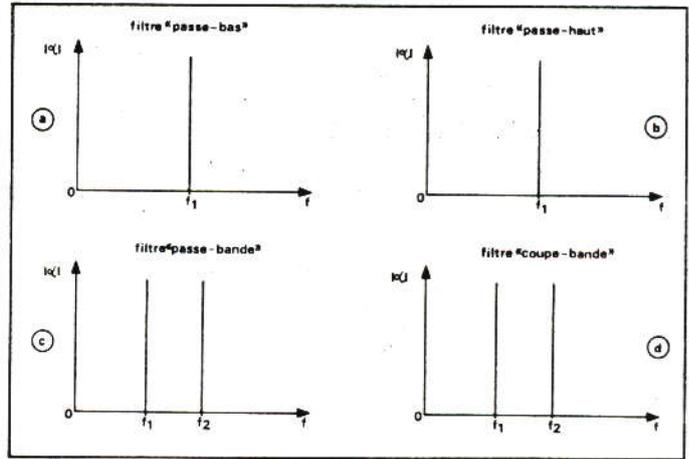


Fig. 2

### Exemples :

Nous représentons ci-dessous les courbes d'affaiblissement d'un filtre « passe-bas » et d'un filtre « passe-bande » réels (fig. 3 et fig. 4).

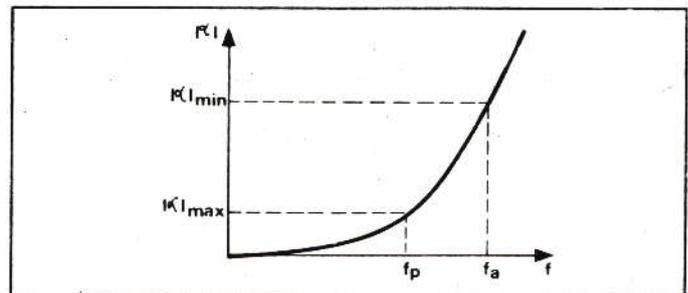


Fig. 3

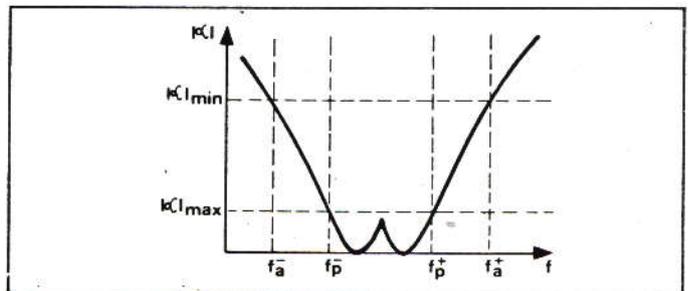


Fig. 4

### Filtre « passe-bas »

$f_p$  = dernière fréquence passante

$f_a$  = première fréquence atténuée

En bande « passante »  $|\alpha| \leq |\alpha|_{\max}$

En bande « coupée »  $|\alpha| \geq |\alpha|_{\min}$

$|\alpha|_{\max}$  = valeur maximale de  $|\alpha|$  en bande « passante »

$|\alpha|_{\min}$  = valeur minimale de  $|\alpha|$  en bande « coupée ».

### Filtre « passe-bande »

$f_a^-$  = dernière fréquence atténuée

$f_p^-$  = première fréquence passante

$f_p^+$  = dernière fréquence passante

$f_a^+$  = première fréquence atténuée

En bandes « coupées »  $|\alpha| \geq |\alpha|_{\min}$

En bande « passante »  $|\alpha| \leq |\alpha|_{\max}$

$|\alpha|_{\min}$  = valeur minimale de l'affaiblissement en bandes « coupées »

$|\alpha|_{\max}$  = valeur maximale de l'affaiblissement en bande « passante ».

Les filtres réalisés en pratique n'étant pas des filtres idéaux, il convient donc, avant tout calcul, de définir pour chaque réalisation un gabarit à l'intérieur duquel devra se situer la courbe d'affaiblissement.

Les gabarits des quatre types de filtres réels sont représentés ci-après (fig. 5, 6, 7 et 8) :

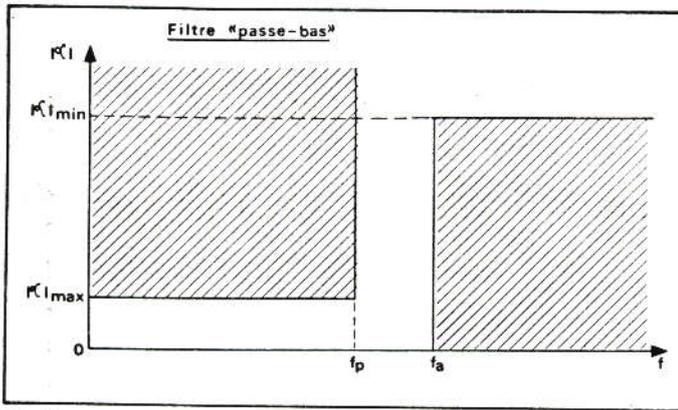


Fig. 5

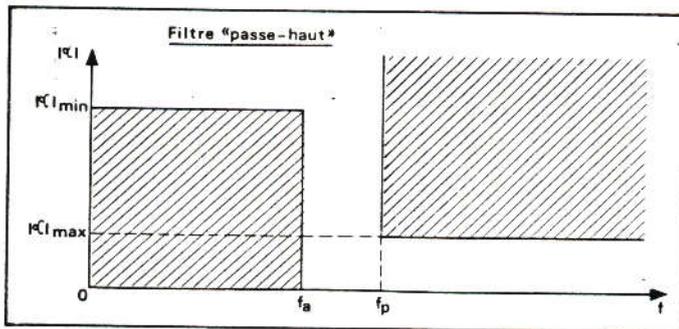


Fig. 6

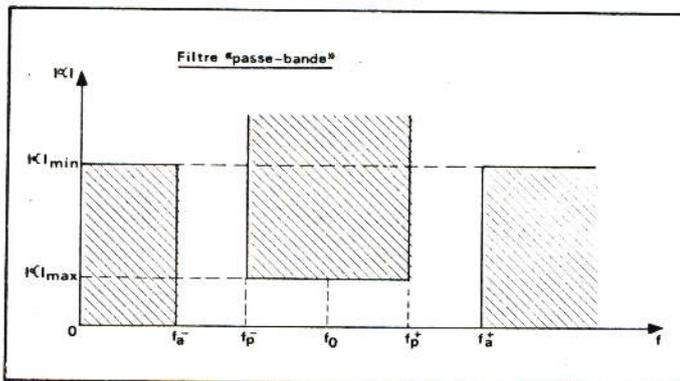


Fig. 7

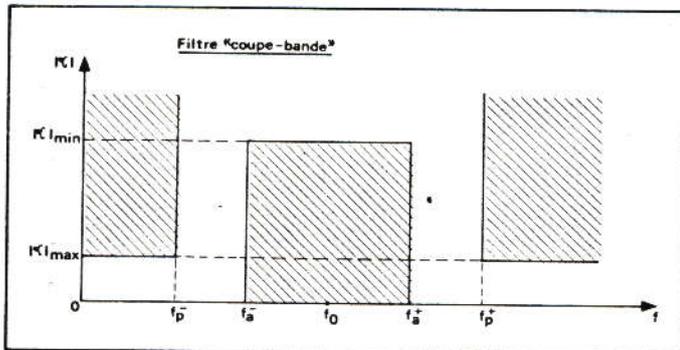


Fig. 8

Il convient de signaler qu'en pratique, en ce qui concerne les gabarits des filtres « coupe-bande » et « passe-bande », on a :

$$f_p^+ \cdot f_p^- = f_a^+ \cdot f_a^- = f_o^2$$

Ces filtres sont dits « symétriques ».

En plus des grandeurs caractéristiques  $f_a$ ,  $f_p$ ,  $|\alpha|_{\min}$  et

$|\alpha|_{\max}$  pour les gabarits des filtres « passe-bas » et « passe-haut »,  $f_a^-$ ,  $f_a^+$ ,  $f_p^-$ ,  $f_p^+$ ,  $f_o$ ,  $|\alpha|_{\max}$  et  $|\alpha|_{\min}$  pour ceux des filtres « passe-bande » et « coupe-bande », il existe d'autres grandeurs caractéristiques qui sont les suivantes :

- la sélectivité  $s$

$$s = \frac{f_p}{f_a} \text{ pour un gabarit « passe-bas »}$$

$$s = \frac{f_a}{f_p} \text{ pour un gabarit « passe-haut »}$$

$$s = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-} = \frac{\Delta f_p}{\Delta f_a} \text{ pour un gabarit « passe-bande »}$$

$$s = \frac{f_a^+ - f_a^-}{f_p^+ - f_p^-} = \frac{\Delta f_a}{\Delta f_p} \text{ pour un gabarit « coupe-bande »}$$

- la largeur de bande relative  $L_B$  pour les filtres « passe-bande » et « coupe-bande » symétriques

$$L_B = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_o} = \frac{\Delta f_p}{f_o} \text{ pour un gabarit « passe-bande »}$$

$$L_B = \frac{f_a^+ - f_a^-}{f_o} = \frac{\Delta f_a}{f_o} \text{ pour un gabarit « coupe-bande »}$$

## Le filtre « prototype »

Lorsque l'on a défini le gabarit du filtre à construire, on ne recherche pas immédiatement une courbe d'affaiblissement se situant à l'intérieur de ce gabarit. On transforme ce dernier en un gabarit d'un filtre dit « prototype » qui est toujours un filtre « passe-bas ». La définition du gabarit du filtre « prototype » fait intervenir la normalisation de l'unité de fréquence.

La valeur normalisée de la fréquence s'écrit :

$$- f_n = \frac{f}{f_p} \text{ pour les filtres « passe-bas » et « passe-haut »}$$

$$- f_n = \frac{f}{f_o} \text{ pour les filtres « passe-bande » et « coupe-bande »}$$

On obtient donc les transformations suivantes (fig. 9) :

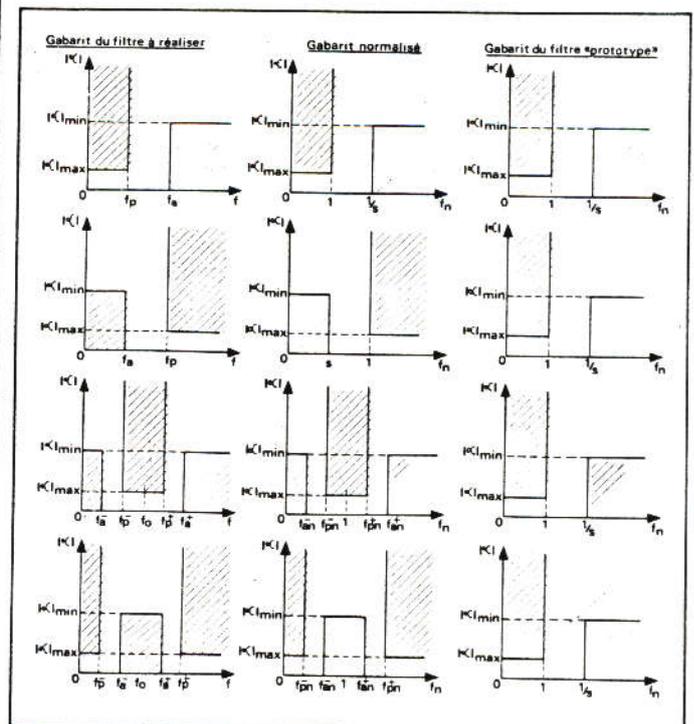


Fig. 9

### Filtre « passe-bas »

$$s = \frac{f_p}{f_a}$$

### Filtre « passe-haut »

$$s = \frac{f_a}{f_p}$$

### Filtre « passe-bande »

$$s = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-}$$

### Filtre « coupe-bande »

$$s = \frac{f_a^+ - f_a^-}{f_p^+ - f_p^-}$$

Lorsque l'on a obtenu le gabarit du filtre « passe-bas » normalisé appelé filtre « prototype », il convient de rechercher une courbe d'affaiblissement se situant à l'intérieur de ce gabarit. On devra donc rechercher la fonction  $f_{TM}(\omega)$  appelée fonction d'approximation qui conduise à l'obtention d'une courbe d'affaiblissement se situant à l'intérieur du gabarit ci-dessus mentionné. On déterminera ensuite la fonction de transfert  $f_T$  du réseau à réaliser. La fonction de transfert  $f_T$  étant calculée, on déterminera la configuration du circuit et les valeurs des composants entrant dans la réalisation de celui-ci. Si le filtre à construire n'est pas du type « passe-bas », on transposera les éléments du filtre « passe-bas » obtenu précédemment. Cette dernière transposition permettra d'obtenir la configuration et les valeurs des éléments du filtre « passe-haut », « passe-bande » ou « coupe-bande » répondant finalement au problème posé. Mais très souvent cette dernière transposition présente le grand inconvénient de faire apparaître des composants indésirables (en général des bobinages). Dans ce cas, il sera préférable de transposer la fonction de transfert  $f_T$  du filtre « prototype » « passe-bas » et de déterminer ensuite, à partir de cette fonction de transfert transposée, la configuration et les valeurs des éléments du filtre « passe-haut », « passe-bande » ou « coupe-bande » à réaliser.

Pour transformer la fonction de transfert du filtre « passe-bas » « prototype » en fonction de transfert du filtre « passe-haut » normalisé, il convient de remplacer, dans l'expression de  $f_T, p$  par  $s/p$ .

La transposition « passe-bas » « passe-bande » s'obtient en remplaçant, dans l'expression de  $f_T, p$  par

$$\frac{1}{L_B} \cdot \left( p + \frac{1}{p} \right)$$

La transposition « passe-bas » - « coupe-bande » s'obtient en remplaçant, dans l'expression de  $f_T, p$  par

$$\frac{1}{L_B} \cdot \left( p + \frac{1}{p} \right)$$

## Fonctions d'approximation et fonctions caractéristiques

Le filtre à réaliser comprend des composantes linéaires et localisés. Sa fonction de transfert est donc une fonction de la variable complexe  $p = j\omega$  et l'on a :

$$f_T(p) = \frac{f_{TN}(p)}{f_{TD}(p)} = \frac{v_2}{v_1}$$

$f_{TN}(p)$  est un polynôme pair. Le filtre doit être stable. Donc  $f_{TD}(p)$  est un polynôme de Hurwitz. Les racines sont donc à partie réelle négative. D'autre part le degré de  $f_{TN}(p)$  est inférieur ou égal à celui de  $f_{TD}(p)$ .

On définit également la fonction de transmission  $f_{Tr}$  du filtre comme il est indiqué ci-dessous :

$$f_{Tr}(p) = \frac{1}{f_T(p)} = \frac{f_{TD}(p)}{f_{TN}(p)} = \frac{v_1}{v_2}$$

Posons :

$$f_{TN}(\omega^2) = |f_{TN}(p)| \text{ et } [f_{TN}(\omega^2)]^2 = |f_{TN}(p)|^2$$

$$f_{TD}(\omega^2) = |f_{TD}(p)| \text{ et } [f_{TD}(\omega^2)]^2 = |f_{TD}(p)|^2$$

On montre aisément que :

$$f_{TM}(\omega) = |f_T(j\omega)| = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{N(\omega^2)}{[f_{TM}(\omega^2)]^2}}}$$

Si l'on pose :

$$C(\omega^2) = \frac{N(\omega^2)}{[f_{TN}(\omega^2)]^2}, \text{ on obtient :}$$

$$f_{TM}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + C(\omega^2)}}$$

Bien sûr, s'il existe dans le filtre un amplificateur de gain  $\beta$ , on a :

$$f_{TM}(\omega) = \frac{\beta}{\sqrt{1 + C(\omega^2)}}$$

$f_{TM}(\omega)$  est la fonction d'approximation  
 $C(\omega^2)$  est la fonction caractéristique du filtre.  
 $N(\omega^2)$  est un polynôme.

On peut écrire que l'on a :

$$\alpha = 20 \log [f_{TM}(\omega)] = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + C(\omega^2)}} \right)$$

$$\alpha = 20 [\log 1 - \log \sqrt{1 + C(\omega^2)}]$$

$$\alpha = -20 \log \sqrt{1 + C(\omega^2)}$$

$$\text{et } \alpha_{\max} = -20 \log \sqrt{1 + C(\omega_p^2)}$$

En bande passante on doit avoir :

$$|\alpha| < |\alpha|_{\max}$$

$$|\alpha| = 20 \log \sqrt{1 + C(\omega^2)}$$

$$\text{et } |\alpha|_{\max} = 20 \log \sqrt{1 + C(\omega_p^2)}$$

$$\text{donc : } 20 \log \sqrt{1 + C(\omega^2)} < |\alpha|_{\max}$$

soit :

$$1 + C(\omega^2) < [10^{\frac{|\alpha|_{\max}}{20}}]^2 = 10^{\frac{|\alpha|_{\max}}{10}}$$

$$\text{et : } C(\omega^2) < 10^{\frac{|\alpha|_{\max}}{10}} - 1$$

$$\text{Si l'on pose : } 10^{\frac{|\alpha|_{\max}}{10}} - 1 = \varepsilon^2,$$

$$\text{on a : } C(\omega^2) < \varepsilon^2$$

En bande coupée on doit avoir :

$$|\alpha| > |\alpha|_{\min}$$

$$\alpha_{\min} = -20 \log \sqrt{1 + C(\omega_a^2)} \text{ donc :}$$

$$20 \log \sqrt{1 + C(\omega^2)} > |\alpha|_{\min}$$

$$1 + C(\omega^2) > 10^{\frac{|\alpha|_{\min}}{10}}$$

$$C(\omega^2) > 10^{\frac{|\alpha|_{\min}}{10}} - 1$$

$$\text{Si l'on pose : } 10^{\frac{|\alpha|_{\min}}{10}} - 1 = \gamma^2,$$

$$\text{on a : } C(\omega^2) > \gamma^2$$

En résumé :

La fonction caractéristique d'un filtre « passe-bas » doit :

- être une fonction paire de la pulsation donc de la fréquence (fonction de  $\omega^2$ ),

- être une fraction rationnelle en  $\omega^2$  dont le dénominateur  $[f_{TN}(\omega^2)]^2$  est un carré,

- avoir une valeur inférieure, en bande passante, à  $\varepsilon^2$ ,

- avoir une valeur supérieure, en bande coupée, à  $\gamma^2$ ,
- être de degré le plus faible possible afin que les composants nécessaires à la réalisation du filtre soient en petite quantité.

La fonction caractéristique étant déterminée, il convient de calculer la fonction de transfert du filtre  $f_T(p)$ .

On montre aisément que :

$$\frac{1}{[f_{TM}(\omega)]^2} = \left| \frac{v_1}{v_2} \right|^2 = f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p) = f(\omega^2)$$

$$\text{et : } \frac{1}{[f_{TM}(\omega)]^2} = \frac{f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p)}{[f_{TN}(p^2)]^2}$$

$$\frac{1}{[f_{TM}(\omega)]^2} = 1 + C(\omega^2) = 1 + \frac{N(\omega^2)}{[f_{TN}(\omega^2)]^2}$$

$$\frac{f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p)}{[f_{TN}(p^2)]^2} = 1 + \frac{N(\omega^2)}{[f_{TN}(\omega^2)]^2}$$

$$\text{et : } \frac{f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p)}{[f_{TN}(p^2)]^2} = 1 + \frac{N(p^2)}{[f_{TN}(p^2)]^2}$$

$$\text{donc : } f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p) = [f_{TN}(p^2)]^2 + N(p^2)$$

On voit immédiatement que lorsque l'on connaît la fonction caractéristique du filtre

$$C(\omega^2) = \frac{N(\omega^2)}{[f_{TN}(\omega^2)]^2}$$

pour trouver la fonction de transfert

$$f_T(p) = \frac{f_{TN}(p)}{f_{T0}(p)}$$

il convient de rechercher les racines de l'expression :

$[f_{TN}(p^2)]^2 + N(p^2)$ , puis de factoriser les  $n$  racines à partie réelle négative pour obtenir  $f_{T0}(p)$ .

En effet, si  $[f_{TN}(p^2)]^2 + N(p^2)$  possède  $2n$  racines,  $f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p)$  possède également  $2n$  racines. Donc  $f_{T0}(p)$  a  $n$  racines et  $f_{T0}(-p)$  a  $n$  racines. Ces racines sont disposées dans le plan complexe selon une double symétrie par rapport à l'axe imaginaire et à l'axe réel ( $f_{T0}(p) \cdot f_{T0}(-p)$  est à coefficients réels). On prend uniquement les racines à partie réelle négative car  $f_{T0}(p)$  est un polynôme de Hurwitz.

On a donc :

$$f_{T0}(p) = k(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots (p - p_n)$$

On détermine ensuite  $f_{TN}(p)$  à partir de  $f_{TN}(\omega^2)$  qui est le polynôme  $f_{TN}(p)$  dans lequel on a remplacé  $p$  par  $j\omega$ .

Les fonctions caractéristiques se divisent en deux catégories qui sont :

- les fonctions dites « polynomiales » qui se présentent sous la forme d'un polynôme (fonctions de Legendre, de Bessel, de Butterworth, de Tchébycheff),
- les fonctions qui se présentent sous la forme d'une fraction rationnelle (fonctions de Zolotareff).

Les présents travaux pratiques concernent la réalisation de divers filtres polynomiaux utilisant les fonctions de Butterworth et de Tchébycheff.

#### Fonctions caractéristiques de Butterworth :

$$C_n(\omega^2) = \varepsilon^2 (\omega^2)^n$$

$$C_n(\omega^2) = \varepsilon^2 \omega^{2n}$$

#### Fonctions caractéristiques de Tchébycheff

$$C_n(\omega^2) = \varepsilon^2 T_n^2(\omega)$$

$T_n$  sont des polynômes de Tchébycheff d'ordre  $n$ .  $n$  est également l'ordre du filtre dans le cas des filtres de Butterworth.

## Principe de la synthèse dite « en cascade » des filtres actifs

La synthèse en cascade consiste à mettre la fonction de transfert précédemment calculée sous la forme d'un produit de termes du premier degré ou du second degré. Chaque réseau correspondant à chacun des termes définis précédemment est « synthétisé » à l'aide d'un élément actif. Les réseaux sont ensuite montés en cascade.

On peut également réaliser la synthèse d'un filtre en associant à un seul élément actif un réseau de condensateurs et de résistances en suivant une méthode d'identification pas à pas. Nous n'utiliserons pas dans les réalisations pratiques faisant l'objet du présent article cette méthode de synthèse.

On a :

$$f_T(p) = \frac{f_{TN}(p)}{f_{T0}(p)} = k \cdot \frac{A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + A_{m-2} p^{m-2} + \dots + A_1 p + A_0}{B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + B_{n-2} p^{n-2} + \dots + B_1 p + B_0}$$

$m \leq n$

$f_{TN}(p)$  admet  $m$  racines qui sont réelles ou imaginaires conjuguées

$f_{T0}(p)$  admet  $n$  racines qui sont réelles ou imaginaires conjuguées.

On peut donc écrire que l'on a :

$$f_T(p) = k' \cdot \frac{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)(p - \alpha_3) \dots (p - \alpha_m)(p - \alpha_{m+1}^*) \dots}{(p - \beta_1)(p - \beta_2)(p - \beta_3) \dots (p - \beta_n)(p - \beta_{n+1}^*) \dots}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  sont les racines réelles,

$\alpha_{11}, \alpha_{11}^*, \beta_{11}, \beta_{11}^*$  sont les racines imaginaires conjuguées.

La décomposition de la fonction de transfert des filtres polynomiaux « passe-bas » conduit aux résultats suivants :

$$f_T(p) = \frac{f_{TN}(p)}{f_{T0}(p)}$$

$$\text{comme : } f_{TN}(p) = 1, \text{ on a : } f_T(p) = \frac{1}{f_{T0}(p)}$$

Les racines sont toutes imaginaires conjuguées deux à deux si  $n$  est pair. Dans le cas où  $n$  est impair, il n'existe qu'une seule racine réelle négative, les autres sont imaginaires conjuguées deux à deux.

#### Exemples :

$$f_T(p) = k_1 \cdot \frac{1}{(p - \beta_{11})(p - \beta_{11}^*)(p - \beta_{12})(p - \beta_{12}^*)}$$

pour  $n = 4$

$$f_T(p) = k_2 \cdot \frac{1}{(p - \beta_{11})(p - \beta_{11}^*)(p - \beta_{12})(p - \beta_{12}^*)}$$

pour  $n = 5$

$$\beta_{11} = -u_1 + j\omega_1 \text{ et } \beta_{11}^* = -u_1 - j\omega_1$$

donc :

$$(p - \beta_{11})(p - \beta_{11}^*) = [p - (-u_1 + j\omega_1)][p - (-u_1 - j\omega_1)]$$

$$(p - \beta_{11})(p - \beta_{11}^*) = p^2 + 2u_1 p + u_1^2 + \omega_1^2$$

Posons :  $u_1^2 + \omega_1^2 = z_1^2$ , on a :

$$(p - \beta_{11})(p - \beta_{11}^*) = p^2 + 2u_1 p + z_1^2$$

On voit donc que les termes qui contiennent 8 racines imaginaires conjuguées peuvent être transformés en facteurs du second degré à coefficients réels.

La fonction de transfert devient :  $f_T(p) =$

$$\frac{k_3}{(p^2 + 2u_1 p + z_1^2)(p^2 + 2u_2 p + z_2^2) \dots (p^2 + 2u_p p + z_p^2)}$$

pour  $n$  pair, avec  $\rho = \frac{n}{2}$ .

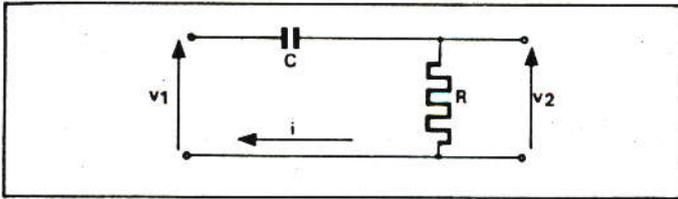


Fig. 12

**Circuit élémentaire actif « passe-bas » du second ordre**

Ce circuit utilise pour son fonctionnement une source commandée tension-tension. Nous allons d'abord décrire cette source. Son schéma est le suivant (fig. 13) :

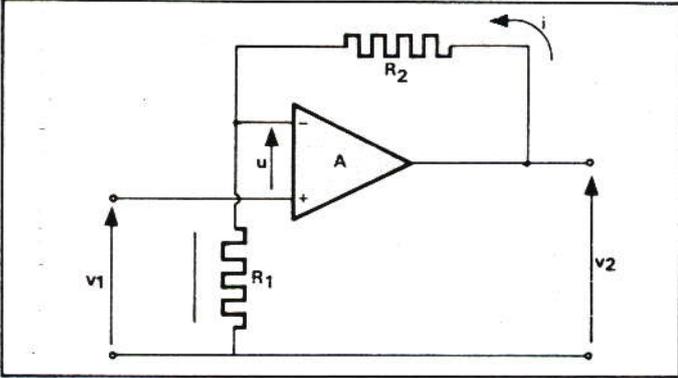


Fig. 13

A est un amplificateur opérationnel de gain A. On a :

$$v_2 = (R_1 + R_2) \cdot i, \quad v_2 = A \cdot u, \quad \frac{v_2}{u} = A$$

$$(R_1 + R_2) \cdot i = A u \text{ et } -v_1 - u + R_1 i = 0, \quad R_1 i = v_1 + u$$

$$i = \frac{v_1 + u}{R_1}, \quad (R_1 + R_2) \cdot \frac{v_1 + u}{R_1} = A u, \quad u = \frac{v_2}{A}$$

$$(R_1 + R_2) \cdot \frac{v_1 + \frac{v_2}{A}}{R_1} = A \cdot \frac{v_2}{A} = v_2,$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot v_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{v_2}{A} = v_2,$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot v_1 = v_2 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{v_2}{A} = v_2 \left( 1 - \frac{R_1 + R_2}{A R_1} \right)$$

$$K = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1 - \frac{R_1 + R_2}{A R_1}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{A R_1}{A R_1 - (R_1 + R_2)}$$

$$K = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_1 + R_2}{A R_1}}$$

Pour des raisons de stabilité A est négatif. Donc :

$$K < \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$\text{Si } |A R_1| \gg R_1 + R_2, \quad |A| \gg \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$\text{et } K = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$v_2 = K v_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot v_1$$

On représente schématiquement le circuit comme il est indiqué ci-contre (fig. 14).

Le schéma du circuit élémentaire « passe-bas » du second ordre est le suivant (fig. 15) :

Calculons sa fonction de transfert :

$$i_1 + i_3 = i_2, \quad i_3 = i_2 - i_1,$$

$$-v_2 + i_3 \frac{1}{C_1 p} - i_1 R + v_1 = 0,$$

$$-v_1 + i_1 R + i_2 R + i_2 \cdot \frac{1}{C_2 p} = 0$$

$$-i_2 \cdot \frac{1}{C_2 p} \cdot K = v_2, \quad i_2 = -\frac{v_2 C_2 p}{K}$$

$$-v_1 + i_1 R - \frac{v_2 C_2 p R}{K} - \frac{v_2 C_2 p}{K C_2 p} = 0$$

$$-v_1 + i_1 R - \frac{v_2 C_2 p R}{K} - \frac{v_2}{K} = 0,$$

$$-v_2 + (i_2 - i_1) \frac{1}{C_1 p} - i_1 R + v_1 = 0$$

$$-v_2 - \frac{v_2 C_2 p}{K} \cdot \frac{1}{C_1 p} - i_1 \frac{1}{C_1 p} - i_1 R + v_1 = 0,$$

$$-v_2 - \frac{v_2 C_2}{K C_1} - \frac{1}{C_1 p} - i_1 R + v_1 = 0$$

$$i_1 R = \frac{v_2 C_2 p R}{K} + \frac{v_2}{K} + v_1,$$

$$i_1 = \frac{v_2 (1 + C_2 p R)}{K R} + \frac{v_1}{R} = \frac{v_2 (1 + C_2 p R) + K v_1}{K R}$$

$$-v_2 - \frac{v_2 C_2}{K C_1} - i_1 \left( \frac{1}{C_1 p} + R \right) + v_1 = 0,$$

$$-v_2 - \frac{v_2 C_2}{K C_1} - \frac{v_2 (1 + C_2 p R) + K v_1}{K R} \cdot \left( \frac{1}{C_1 p} + R \right) + v_1 = 0$$

$$-v_2 - \frac{v_2 C_2}{K C_1} - \frac{v_2 (1 + C_2 p R) + K v_1}{K R} \cdot \left( \frac{1 + R C_1 p}{C_1 p} \right) + v_1 = 0$$

$$-v_2 [K R C_1 p + C_2 p R + (1 + C_2 p R) + (1 + C_2 p R) R C_1 p] + v_1 [-K - K R C_1 p + K R C_1 p] = 0$$

$$v_1 K = -v_2 [R^2 C_1 C_2 p^2 + R [2 C_2 + C_1 (1 + K)] p + 1]$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-K}{R^2 C_1 C_2 p^2 + R [2 C_2 + C_1 (1 + K)] p + 1}$$

Mais, en posant :

$$-i_2 \cdot \frac{1}{C_2 p} \cdot K = v_2$$

on considèrerait  $K < 0$ . Comme  $K > 0$ , on a :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K}{R^2 C_1 C_2 p^2 + R [2 C_2 + C_1 (1 - K)] p + 1}$$

Si  $K = 1$ , on obtient :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 2 R C_2 p + 1}$$

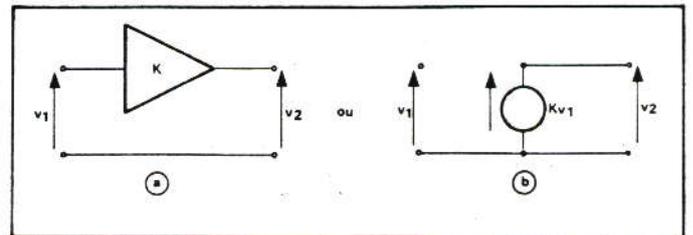


Fig. 14

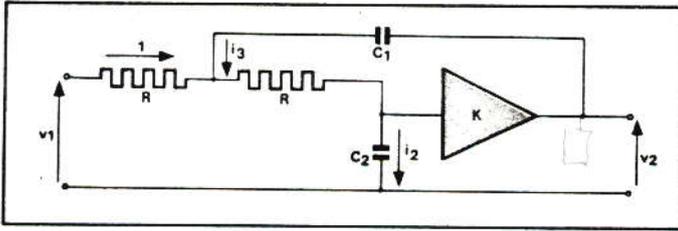


Fig. 15

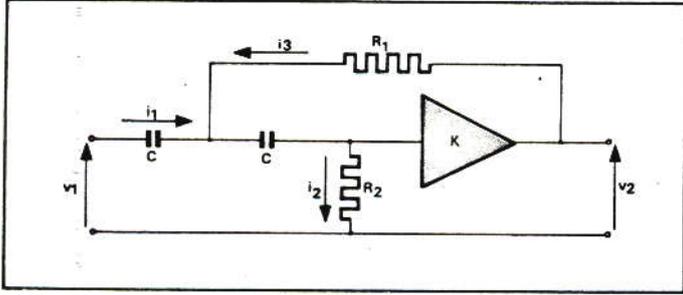


Fig. 16

**Circuit élémentaire actif « passe-haut » du second ordre**

Son schéma est le suivant (fig. 16) :

Calculons sa fonction de transfert. On a :

$$-v_2 + R_1 i_3 - i_1 \cdot \frac{1}{C p} + v_1 = 0,$$

$$-v_1 + i_1 \cdot \frac{1}{C p} + i_2 \cdot \frac{1}{C p} + i_2 R_2 = 0$$

$$-i_2 R_2 K = v_2, \text{ donc : } i_2 = -\frac{v_2}{K R_2}$$

$$-v_1 + i_1 \cdot \frac{1}{C p} + \left(-\frac{v_2}{K R_2}\right) \cdot \frac{1}{C p} - \frac{v_2}{K R_2} \cdot R_2 = 0$$

$$-v_1 + \frac{i_1}{C p} - \frac{v_2}{K R_2 C p} - \frac{v_2}{K} = 0$$

$$i_1 + i_3 = i_2 \text{ et } i_3 = i_2 - i_1$$

$$-v_2 + (i_2 - i_1) R_1 - \frac{i_1}{C p} + v_1 = 0$$

$$\text{et } -v_2 + i_2 R_1 - i_1 R_1 - \frac{i_1}{C p} + v_1 = 0$$

$$-v_2 - \frac{v_2}{K R_2} \cdot R_1 - i_1 R_1 - \frac{i_1}{C p} + v_1 = 0,$$

$$\frac{i_1}{C p} = \frac{v_2}{K R_2 C p} + \frac{v_2}{K} + v_1$$

$$i_1 = \frac{v_2 C p}{K R_2 C p} + \frac{v_2 C p}{K} + v_1 C p,$$

$$i_1 = \frac{v_2}{K R_2} + \frac{v_2 C p}{K} + v_1 C p$$

$$i_1 = \frac{v_2 (1 + R_2 C p) + v_1 K R_2 C p}{K R_2}$$

$$-v_2 - \frac{v_2 R_1}{K R_2} - \frac{v_2 R_1 (1 + R_2 C p) + v_1 K R_1 R_2 C p}{K R_2} - \frac{v_2 (1 + R_2 C p) + v_1 K R_2 C p}{K R_2 C p} + v_1 = 0$$

$$-v_2 K R_2 C p - v_2 R_1 C p - v_2 R_1 C p (1 + R_2 C p)$$

$$-v_1 K R_1 R_2 C^2 p^2 - v_2 (1 + R_2 C p) = 0$$

$$-\frac{v_2}{v_1} = \frac{K R_1 R_2 C^2 p^2}{R_1 R_2 C^2 p^2 + K R_2 C p + 2 R_1 C p + R_2 C p + 1}$$

et :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-K R_1 R_2 C^2 p^2}{R_1 R_2 C^2 p^2 + [2 R_1 + R_2 (1 + K)] p + 1}$$

Mais en écrivant :  $-i_2 R_2 K = v_2$  on considèrerait  $K < 0$ . Comme  $K > 0$ , on a :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K R_1 R_2 C^2 p^2}{R_1 R_2 C^2 p^2 + C [2 R_1 + R_2 (1 - K)] p + 1}$$

Si  $K = 1$ , on obtient :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_1 R_2 C^2 p^2}{R_1 R_2 C^2 p^2 + 2 R_1 C p + 1}$$

## Etude détaillée d'un filtre actif « passe-bas » de Butterworth d'ordre 2

On veut réaliser un filtre actif « passe-bas » « caractérisé » par le gabarit suivant (fig. 17) :

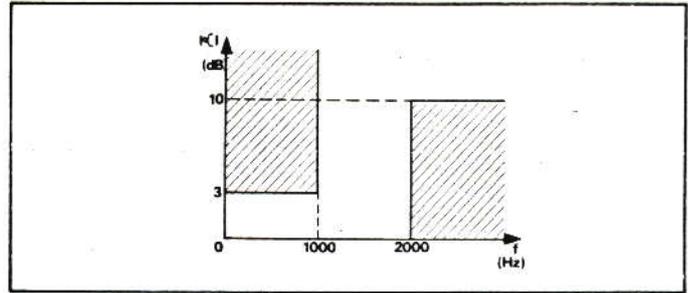


Fig. 17

Afin d'être sûr de réussir à construire un filtre dont la courbe d'affaiblissement se situe à l'intérieur du gabarit représenté ci-contre, on va conduire les calculs de telle manière que la courbe d'affaiblissement recherchée se situe à l'intérieur d'un gabarit dont les caractéristiques  $|\alpha|_{\max}$  et  $|\alpha|_{\min}$  seront plus « sévères » et les fréquences  $f_p$  et  $f_a$  seront comprises entre 800 et 2200 Hz.

Nous allons donc considérer que le gabarit qui nous est imposé est le suivant (fig. 18).

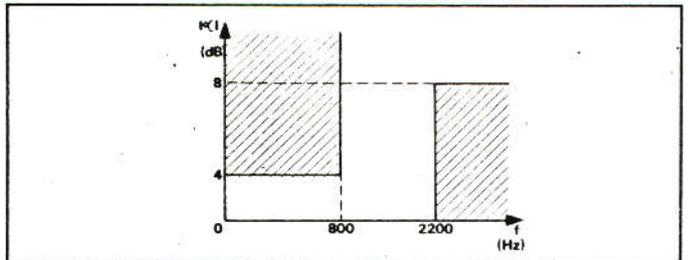


Fig. 18

Nous choisissons de réaliser un filtre de Butterworth. Il est important de signaler qu'en pratique l'utilisateur devra choisir le type de filtre qui convient le mieux à la résolution du problème qui lui est posé en tenant compte d'un certain nombre de critères comme la complexité de la construction, la raideur de la coupure, la régularité de la courbe de réponse, le comportement en régime transitoire, etc. Le choix du type de filtre étant fait, il convient de déterminer sa fonction de transfert. Pour cela nous utiliserons les abaques et les tableaux donnés dans les annexes. Bien sûr, on peut calculer cette fonction de transfert comme il a été indiqué dans un chapitre précédent. Il est évident que plus le gabarit du filtre à réaliser se rapprochera du filtre dit idéal, plus la fonction de transfert du circuit aura un degré élevé et plus la réalisation de celui-ci sera complexe. Le degré de la fonction de transfert devra donc être le plus petit possible.

Les paramètres caractéristiques du gabarit sont les suivants :

$$|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB}, |\alpha|_{\min} = 10 \text{ dB}$$

$$f_p = 1000 \text{ Hz}, f_a = 2000 \text{ Hz}, s = \frac{f_p}{f_a} = \frac{1000}{2000} = 0,5.$$

Le gabarit du filtre « prototype » est le suivant (fig. 19).

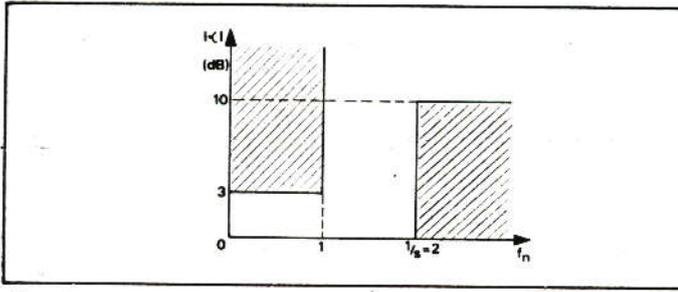


Fig. 19

A titre d'exemple, déterminons l'ordre du filtre par le calcul.

Nous avons dit qu'il s'agissait d'une fonction caractéristique de Butterworth, donc de la forme :

$$C_n(\omega^2) = \varepsilon^2 \omega^{2n}.$$

Dans cette formule, il s'agit de la pulsation normalisée. Pour  $|\alpha|_{\min} = 3 \text{ dB}$ , on a :  $\varepsilon \approx 1$ . La fonction caractéristique devient donc :  $C_n(\omega^2) = \omega^{2n}$ .

$$\text{Pour } f_n = \frac{1}{s} = 2, C_n\left(\frac{1}{s}\right) \geq \gamma^2$$

$$\gamma^2 = 10^{10/10} - 1 = 9. \text{ Donc : } \left[\frac{1}{s}\right]^{2n} = (2)^{2n} \geq 9.$$

$$4^n \geq 9, \log 4^n \geq \log 9, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$n \log 4 \geq \log 9; 0,6 n \geq 0,954 \text{ et } n \geq 1,59.$$

On prendra donc  $n = 2$  et l'on aura :  $C_n(\omega^2) = \omega^4$ .

La détermination de la fonction de transfert est maintenant possible. On a :

$$N(p)^2 = \left(\frac{p}{j}\right)^4 = \frac{p^4}{j^4} = p^4$$

$$f_{TD}(p) \cdot f_{TD}(-p) = [f_{TN}(p^2)]^2 + N(p^2) = 1 + p^4$$

$$\text{Posons : } 1 + p^4 = 0, p = \sqrt[4]{-1}.$$

Recherchons les quatre valeurs pour  $k=0, 1, 2, 3$ , de l'expression :

$$\sqrt[4]{-1} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

On obtient :

$$f_{TD}(p) = 1 \cdot \left(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(p + \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f_{TD}(p) = \left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$f_{TD}(p) = p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1.$$

La fonction de transfert du filtre est donc :

$$f_T(p) = \frac{1}{p^2 + 1,4142 p + 1}$$

Le filtre sera réalisé en utilisant le circuit élémentaire actif « passe-bas » du second ordre étudié précédemment (avec :  $K = 1$ ).

La fonction de transfert de ce circuit est :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 2 R C_2 p + 1}$$

et son schéma est le suivant (fig. 20).

La fonction de transfert calculée est

$$f_T(p) = \frac{1}{p^2 + 1,4142 p + 1}$$

Dans cette fonction, la variable complexe  $p$  est, bien sûr, normalisée.

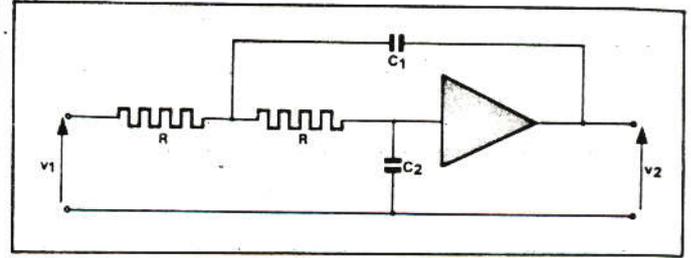


Fig. 20

Calculons donc, à partir de ces deux fonctions de transfert, les valeurs des éléments du filtre. On a :

$$1,4142 j \frac{\omega}{\omega_p} = 2 R C_2 j \omega, \frac{1,4142}{\omega_p} = 2 R C_2$$

Prenons, comme valeur de  $R$ ,  $10 \text{ k}\Omega$ .

$$C_2 = \frac{1,4142}{2} \cdot \frac{1}{R \omega_p} = 0,7071 \cdot C_0$$

$$C_0 = \frac{1}{10^4 \omega_p}, \omega_p = 2 \pi f_p = 6,28318 \times 1000 = 6283,18$$

$$C_0 = \frac{1}{10^4 \times 6283,18} = 16 \times 10^{-9}, C_0 = 16 \text{ nF}$$

$$\text{et : } C_2 = 0,7071 \cdot C_0$$

$$C_2 = 11 \text{ nF}$$

On a ensuite :

$$-\frac{\omega^2}{\omega_p^2} = -R^2 C_1 C_2 \omega^2,$$

$$\frac{1}{\omega_p^2} = R^2 C_1 C_2 = R^2 C_1 \times 0,7071 \times C_0$$

$$\frac{1}{\omega_p^2} = C_1 \times 0,7071 \times \frac{10^4}{\omega_p}$$

$$C_1 = \frac{1}{0,7071} \cdot \frac{1}{10^4 \omega_p} = \frac{1}{0,7071} \cdot C_0$$

$$C_1 = 1,4142 \cdot C_0 = 1,4142 \cdot 16 = 22,62 \text{ nF}$$

$$C_1 = 22,62 \text{ nF}$$

On obtient donc le filtre suivant (fig. 21) :

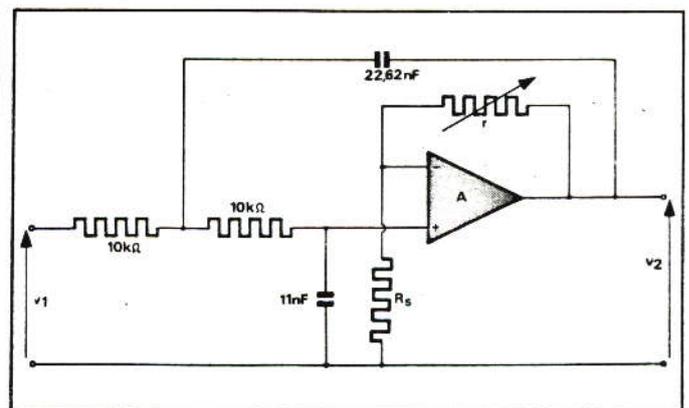


Fig. 21

Les composants devront être à 1 %. Ce filtre a été réalisé avec un amplificateur opérationnel du type MC 1303 et les résistances  $r = 10 \Omega$  et  $R_s = 2 \text{ k}\Omega$ .

La courbe d'affaiblissement alors obtenue est donnée ci-après (fig. 22).

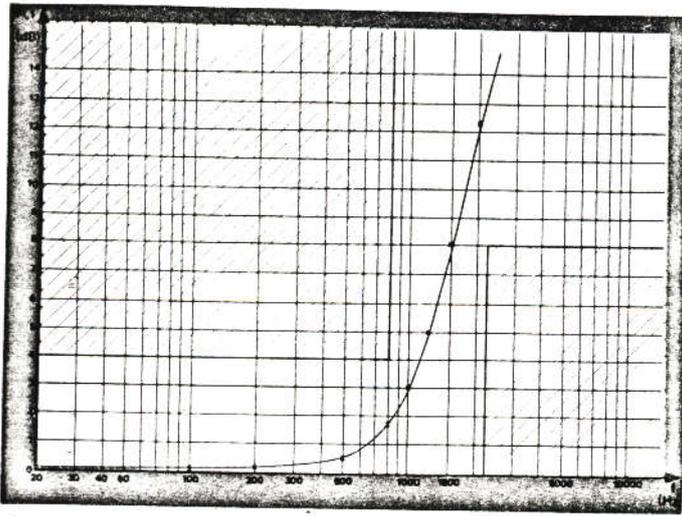


Fig. 22

### Sensibilité de la courbe d'affaiblissement à la variation d'un élément

Soit le circuit suivant (fig. 23) et soit sa courbe de réponse (fig. 24).

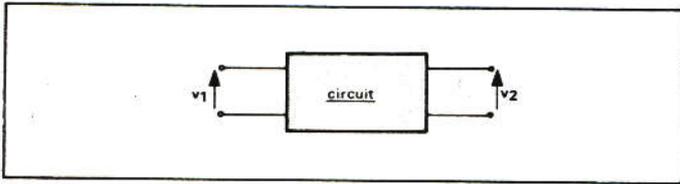


Fig. 23

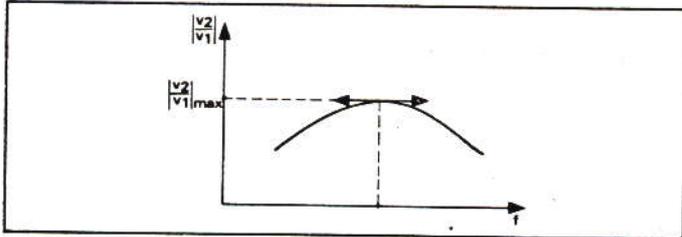


Fig. 24

On définit la sensibilité de la courbe de réponse à la variation d'un des éléments  $m$  du circuit par la formule suivante :

$$S_m^{|v_2/v_1|_{\max}} = \frac{\Delta \left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\max}}{\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\max}} \cdot \frac{1}{\Delta m}$$

Si l'on pose :  $\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\max} = Q$ ,

$$\text{on a : } S_m^Q = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{1}{\Delta m}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta m}{m} \cdot S_m^Q$$

et :

$$S_m^Q = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{m}{\Delta m}$$

$$S_m^Q = \frac{\Delta Q}{\Delta m} \cdot \frac{m}{Q}$$

On peut écrire :

$$S_m^Q = \frac{\delta Q}{Q} \cdot \frac{m}{\delta m}$$

$$S_m^Q = \frac{\delta Q}{Q} \cdot \frac{m}{\delta m}$$

$$S_m^Q = \frac{\delta Q}{\delta m} \cdot \frac{m}{Q}$$

Exemple : Soit le circuit suivant (fig. 25) :

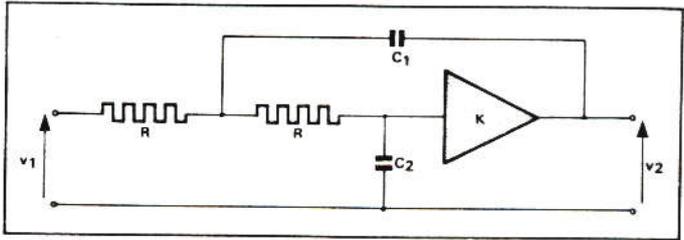


Fig. 25

On a trouvé pour  $K = 1$ ,

$$f_T(p) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 2 R C_2 p + 1}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{R^2 C_1 C_2} - \frac{2}{R^2 C_1^2}} \text{ pour } \left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\max}$$

Si  $\frac{C_1}{8 C_2} \geq 1$ , on a :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{R^2 C_1 C_2} - \frac{2}{R^2 C_1^2}} \approx \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} = \omega_0$$

D'autre part,

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - R^2 C_1 C_2 \omega^2)^2 + 4 R^2 C_2^2 \omega^2}}$$

et pour  $\frac{C_1}{8 C_2} \geq 1$ , on a :  $\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\max} \approx Q =$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - R^2 C_1 C_2 \cdot \frac{1}{R^2 C_1 C_2}\right)^2 + 4 R^2 C_2^2 \cdot \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{4 C_2}{C_1}}} = \frac{\sqrt{C_1}}{2 \sqrt{C_2}}$$

$$\text{et } Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

La sensibilité de la courbe d'affaiblissement du circuit, ci-dessus, à la variation de  $C_1$  est donc :

$$S_{C_1}^Q = \frac{\Delta Q}{\Delta C_1} \cdot \frac{C_1}{Q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_2}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{C_1}} \cdot \frac{C_1}{\frac{\sqrt{C_1}}{2 \sqrt{C_2}}}$$

$$S_{C_1}^Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{C_1} \sqrt{C_2}} \cdot \frac{2 \sqrt{C_2} \cdot C_1}{\sqrt{C_1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{C_1} \sqrt{C_2}} \cdot \frac{2 \sqrt{C_2} \sqrt{C_1}}{1}$$

$$S_{C_1}^Q = \frac{1}{2}$$

## Annexes

### (partie de l'article donnant des tableaux utiles pour la synthèse d'un filtre)

#### Fonctions de transmission de filtres de Butterworth (filtres « passe-bas »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$ . Il convient de signaler également qu'il s'agit de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
1	$p + 1$
2	$p^2 + 2p + 1$
3	$p^3 + 2p^2 + 2p + 1$
4	$p^4 + 2,6131p^3 + 3,4142p^2 + 2,6131p + 1$
5	$p^5 + 3,2361p^4 + 5,2361p^3 + 5,2361p^2 + 3,2361p + 1$
6	$p^6 + 3,8637p^5 + 7,4641p^4 + 9,1416p^3 + 7,4641p^2 + 3,8637p + 1$
7	$p^7 + 4,4940p^6 + 10,09p^5 + 14,592p^4 + 14,592p^3 + 10,098p^2 + 4,4940p + 1$
8	$p^8 + 5,1528p^7 + 13,137p^6 + 21,846p^5 + 25,688p^4 + 21,846p^3 + 13,137p^2 + 5,1528p + 1$
9	$p^9 + 5,759p^8 + 16,582p^7 + 31,163p^6 + 41,986p^5 + 41,986p^4 + 31,163p^3 + 16,582p^2 + 5,759p + 1$

#### Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Butterworth (filtres « passe-bas »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$ . Il convient de signaler également qu'il s'agit de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
1	$p + 1$
2	$p^2 + 1,4142p + 1$
3	$(p^2 + 1,0000p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1,8477p + 1)(p^2 + 0,7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1,6180p + 1)(p^2 + 0,6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1,9318p + 1)(p^2 + 1,4142p + 1)(p^2 + 0,5176p + 1)$
7	$(p^2 + 1,8019p + 1)(p^2 + 1,2469p + 1)(p^2 + 0,4450p + 1)(p + 1)$
8	$(p^2 + 1,9615p + 1)(p^2 + 1,6629p + 1)(p^2 + 1,1111p + 1)(p^2 + 0,3901p + 1)$
9	$(p^2 + 1,8793p + 1)(p^2 + 1,5320p + 1)(p^2 + 1,0000p + 1)(p^2 + 0,3472p + 1)(p + 1)$

#### Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Butterworth (filtres « passe-bande »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$  et  $L_B = 100\%$ . Il s'agit, d'autre part, de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
2	$(0,4805p^2 + 0,459p + 1) / [(2,081p^2 + 0,9552p + 1) / 2,081p^2]$
3	$(0,422p^2 + 0,2968p + 1) / [(2,3692p^2 + 0,7031p + 1) / 2,3692p^2]$
4	$(0,6533p^2 + 0,7301p + 1) / [(1,5306p^2 + 1,1176p + 1) / 1,5306p^2]$
5	$(0,4038p^2 + 0,2201p + 1) / [(2,476p^2 + 0,5451p + 1) / 2,476p^2]$
6	$(0,5343p^2 + 0,5634p + 1) / [(1,8714p^2 + 1,0545p + 1) / 1,8714p^2]$
7	$(0,3957p^2 + 0,1752p + 1) / [(2,5266p^2 + 0,4427p + 1) / 2,5266p^2]$
8	$(0,7455p^2 + 0,8251p + 1) / [(1,3412p^2 + 1,1067p + 1) / 1,3412p^2]$
9	$(0,4805p^2 + 0,459p + 1) / [(2,081p^2 + 0,9852p + 1) / 2,081p^2]$
10	$(0,3914p^2 + 0,1456p + 1) / [(2,5543p^2 + 0,372p + 1) / 2,5543p^2]$

#### Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Butterworth (filtres « passe-bande »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$  et  $L_B = 50\%$ . Il s'agit, d'autre part, de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
2	$(0,6996p^2 + 0,291p + 1) / [(1,4292p^2 + 0,416p + 1) / (1,4292p^2)]$
3	$(0,6486p^2 + 0,1967p + 1) / [(1,5417p^2 + 0,3032p + 1) / 1,5417p^2]$
4	$(0,8217p^2 + 0,4167p + 1) / [(1,2168p^2 + 0,5071p + 1) / 1,2168p^2]$
5	$(0,6313p^2 + 0,1481p + 1) / [(1,5839p^2 + 0,2345p + 1) / 1,5839p^2]$
6	$(0,7416p^2 + 0,3445p + 1) / [(1,3482p^2 + 0,4645p + 1) / 1,3482p^2]$
7	$(0,6234p^2 + 0,1186p + 1) / [(1,6039p^2 + 0,1903p + 1) / 1,6039p^2]$
8	$(0,8752p^2 + 0,4508p + 1) / [(1,6039p^2 + 0,1903p + 1) / 1,6039p^2]$
9	$(0,6996p^2 + 0,291p + 1) / [(1,4292p^2 + 0,4160p + 1) / 1,4292p^2]$
10	$(0,6192p^2 + 0,0989p + 1) / [(1,6149p^2 + 0,1598p + 1) / 1,6149p^2]$

**Courbes d'affaiblissement des filtres de Butterworth (filtres « passe-bas »)**

Ces courbes ont été tracées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB}$  ( $\epsilon = 1$ ). D'autre part,  $f_n$  est la fréquence normalisée.

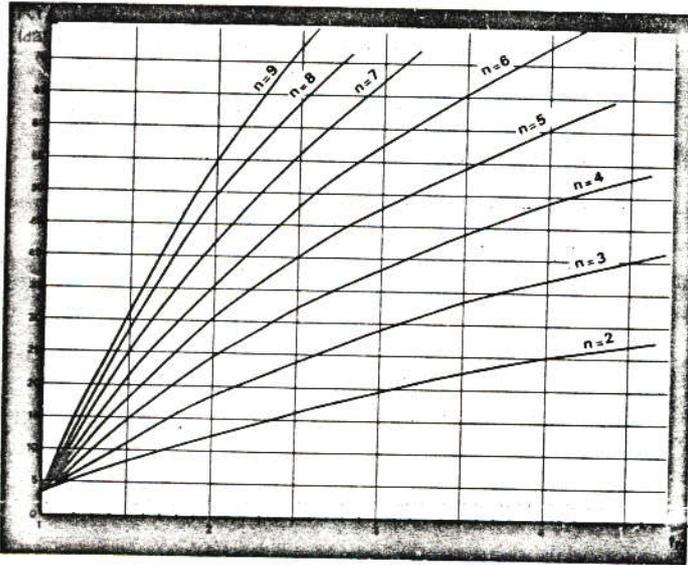


Fig. 26

**Fonctions de transmission des filtres de Tchébycheff (filtres « passe-bas »)**

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 1 \text{ dB}$  ( $\epsilon = 0,50884$ ). Il convient de signaler également qu'il s'agit de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
2	$0,907 p^2 + 0,9956 p + 1$
3	$2,0353 p^3 + 2,0116 p^2 + 2,5206 p + 1$
4	$3,628 p^4 + 3,4558 p^3 + 5,2749 p^2 + 2,6942 p + 1$
5	$8,1415 p^5 + 7,6271 p^4 + 13,75 p^3 + 7,933 p^2 + 4,7264 p + 1$
6	$14,512 p^6 + 13,47 p^5 + 28,02 p^4 + 17,445 p^3 + 13,632 p^2 + 4,456 p + 1$
7	$32,566 p^7 + 30,06 p^6 + 70,866 p^5 + 46,53 p^4 + 44,21 p^3 + 17,866 p^2 + 6,9584 p + 1$

**Diverses valeurs de  $\epsilon$**

On a :

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{|\alpha|_{\max}}{10}} - 1}$$

$|\alpha|_{\max}$  en dB.

$ \alpha _{\max}$	$\epsilon$	$ \alpha _{\max}$	$\epsilon$	$ \alpha _{\max}$	$\epsilon$
0,1 dB	0,15262042	0,7 dB	0,41820755	2,5 dB	0,88220146
0,2 dB	0,21709111	0,8 dB	0,44973818	3,0 dB	0,99762835 $\approx 1$
0,3 dB	0,26743094	0,9 dB	0,47986328	3,5 dB	1,11297850
0,4 dB	0,31060939	1,0 dB	0,50884714	4,0 dB	1,22958791
0,5 dB	0,34931140	1,5 dB	0,64229086	4,5 dB	1,34847430
0,6 dB	0,38490729	2,0 dB	0,76478310	5,0 dB	1,47046852

**Courbes d'affaiblissement des filtres de Tchébycheff (filtres « passe-bas »)**

Ces courbes ont été tracées pour  $|\alpha|_{\max} = 1 \text{ dB}$  ( $\epsilon = 0,50884$ ).  $f_n$  est la fréquence normalisée.

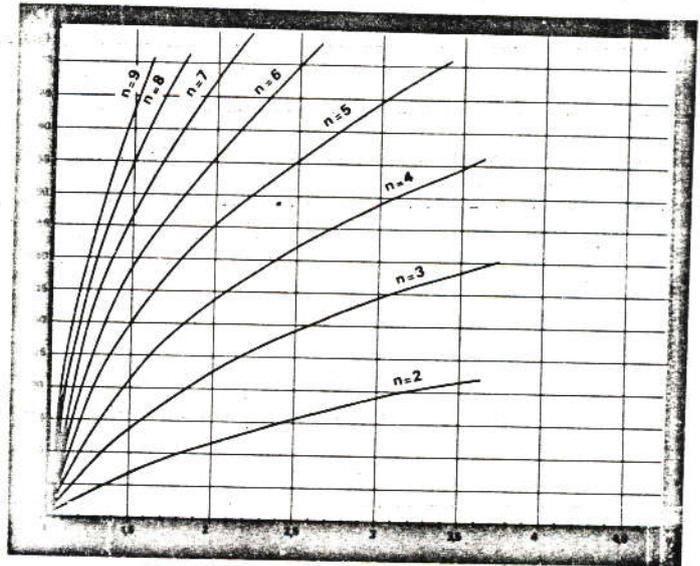


Fig. 27

**Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Tchébycheff (filtres « passe-bas »)**

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 1 \text{ dB}$  ( $\epsilon = 0,50884$ ). Il s'agit, d'autre part, de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
2	$0,907 p^2 + 0,9956 p + 1$
3	$(1,0058 p^2 + 0,497 p + 1)(2,023 p + 1)$
4	$(1,0136 p^2 + 0,2828 p + 1)(3,5791 p^2 + 8,4113 p + 1)$
5	$(2,3293 p^2 + 1,0911 p + 1)(1,0118 p^2 + 0,181 p + 1)(3,4540 p + 1)$
6	$(8,0188 p^2 + 3,7217 p + 1)(1,0093 p^2 + 0,1255 p + 1)(1,793 p^2 + 0,6092 p + 1)$
7	$(4,3393 p^2 + 1,6061 p + 1)(1,5303 p^2 + 0,3919 p + 1)(1,0073 p^2 + 0,092 p + 1)(4,868 p + 1)$
8	$(14,2326 p^2 + 5,0098 p + 1)(1,382 p^2 + 0,2755 p + 1)(2,9337 p^2 + 0,8754 p + 1)(1,0058 p^2 + 0,0704 p + 1)$
9	$(7,0242 p^2 + 2,1033 p + 1)(2,2801 p^2 + 0,5566 p + 1)(1,0047 p^2 + 0,056 p + 1)(1,2896 p^2 + 0,2054 p + 1)(6,276 p + 1)$

## Annexes

### (partie de l'article donnant des tableaux utiles pour la synthèse d'un filtre)

#### Fonctions de transmission de filtres de Butterworth (filtres « passe-bas »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$ . Il convient de signaler également qu'il s'agit de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
1	$p + 1$
2	$p^2 + 2p + 1$
3	$p^3 + 2p^2 + 2p + 1$
4	$p^4 + 2,6131p^3 + 3,4142p^2 + 2,6131p + 1$
5	$p^5 + 3,2361p^4 + 5,2361p^3 + 5,2361p^2 + 3,2361p + 1$
6	$p^6 + 3,8637p^5 + 7,4641p^4 + 9,1416p^3 + 7,4641p^2 + 3,8637p + 1$
7	$p^7 + 4,4940p^6 + 10,09p^5 + 14,592p^4 + 14,592p^3 + 10,098p^2 + 4,4940p + 1$
8	$p^8 + 5,1528p^7 + 13,137p^6 + 21,846p^5 + 25,688p^4 + 21,846p^3 + 13,137p^2 + 5,1528p + 1$
9	$p^9 + 5,759p^8 + 16,582p^7 + 31,163p^6 + 41,986p^5 + 41,986p^4 + 31,163p^3 + 16,582p^2 + 5,759p + 1$

#### Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Butterworth (filtres « passe-bas »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$ . Il convient de signaler également qu'il s'agit de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
1	$p + 1$
2	$p^2 + 1,4142p + 1$
3	$(p^2 + 1,0000p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1,8477p + 1)(p^2 + 0,7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1,6180p + 1)(p^2 + 0,6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1,9318p + 1)(p^2 + 1,4142p + 1)(p^2 + 0,5176p + 1)$
7	$(p^2 + 1,8019p + 1)(p^2 + 1,2469p + 1)(p^2 + 0,4450p + 1)(p + 1)$
8	$(p^2 + 1,9615p + 1)(p^2 + 1,6629p + 1)(p^2 + 1,1111p + 1)(p^2 + 0,3901p + 1)$
9	$(p^2 + 1,8793p + 1)(p^2 + 1,5320p + 1)(p^2 + 1,0000p + 1)(p^2 + 0,3472p + 1)(p + 1)$

#### Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Butterworth (filtres « passe-bande »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$  et  $L_B = 100\%$ . Il s'agit, d'autre part, de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
2	$(0,4805p^2 + 0,459p + 1) / [(2,081p^2 + 0,9552p + 1) / 2,081p^2]$
3	$(0,422p^2 + 0,2968p + 1) / [(2,3692p^2 + 0,7031p + 1) / 2,3692p^2]$
4	$(0,6533p^2 + 0,7301p + 1) / [(1,5306p^2 + 1,1176p + 1) / 1,5306p^2]$
5	$(0,5343p^2 + 0,5634p + 1) / [(1,8714p^2 + 1,0545p + 1) / 1,8714p^2]$
6	$(0,7455p^2 + 0,8251p + 1) / [(1,3412p^2 + 1,1067p + 1) / 1,3412p^2]$

#### Fonctions de transmission « décomposées » des filtres de Butterworth (filtres « passe-bande »)

Ces fonctions ont été calculées pour  $|\alpha|_{\max} = 3 \text{ dB} (\epsilon = 1)$  et  $L_B = 50\%$ . Il s'agit, d'autre part, de fonctions normalisées.

Ordre du filtre	Fonction de transmission correspondante
2	$(0,6996p^2 + 0,291p + 1) / [(1,4292p^2 + 0,416p + 1) / (1,4292p^2)]$
3	$(0,6486p^2 + 0,1967p + 1) / [(1,5417p^2 + 0,3032p + 1) / 1,5417p^2]$
4	$(0,8217p^2 + 0,4167p + 1) / [(1,2168p^2 + 0,5071p + 1) / 1,2168p^2]$
5	$(0,7416p^2 + 0,3445p + 1) / [(1,5839p^2 + 0,2345p + 1) / 1,5839p^2]$
6	$(0,8752p^2 + 0,4508p + 1) / [(1,1425p^2 + 0,515p + 1) / 1,1425p^2]$